

# 丸みのある管出口のおそい粘性流

(慣性項を考慮したとき)

葦 埜 勲\*

## Viscous Flow in Rounded Pipe Exit

(When the Inertia Terms were considered)

Isao ASHINO

(Received Sep. 30, 1969)

The author studied theoretically the viscous flow in a rounded pipe exit when the inertia terms in Navier-Stokes equations of motion were considered and Reynolds number in a straight pipe was small comparatively. The results may be summarized as follows.

- (1) The stream function could be approximated with the power series of Reynolds number.
- (2) The state between a divergent flow and a convergent flow is different. There is the tendency that a divergent flow concentrates in a center and a convergent flow becomes uniform.
- (3) It is too difficult to decide the position of separation point accurately with this analysis. However, the estimation to some extent may be possible.

### 1 ま え が き

前報告<sup>(1)</sup>において、大きな丸みをもった管出口の粘性流れにつき、境界層におけるポールハウゼン<sup>(2)</sup>と同様な方法によって速度分布を多項式で近似し、直交曲線座標を用いて表わした運動方程式を等傾線法によって解き、はく離点の位置を推定した。しかしながら、その近似法は直管内の流れのレイノルズ数がおおよそ100よりも大きくなければ得られた結果の誤差も大きくなり不正確になる。レイノルズ数がおおよそ2以下ではナビヤストークスの運動方程式の慣性項は省略でき、拡大流・収縮流のいずれの場合にも粘性のため圧力は降下する一方であって、はく離はおこらない<sup>(3)</sup>。

本報では運動方程式の慣性項が省略できない場合について、レイノルズ数の比較的小さいところの粘性流れを理論的に考察した。

### 2 基礎方程式

一般直交曲線座標 $(\alpha, \beta, r)$ を用いて基礎式を表わす。流れは定常、非圧縮性で軸対称流れであるとする。

$\alpha, \beta$  および  $r$  の増加する方向の速度成分を  $u, v$  および  $w$  とする。また、 $\alpha, \beta$  および  $r$  方向の線素を  $h_1 d\alpha, h_2 d\beta$  および  $h_3 dr$  とすると、 $h_1, h_2$  および  $h_3$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \\ h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2} \\ h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

軸対称流れの子午面内の直交曲線座標を  $\alpha$  および

\* 機械工学科

$\beta$  とすれば  $r$  は方位角を表わす。したがって、 $h_3$  は対称軸からの距離を表わす。また、すべての物理量は  $r$  に無関係となる。それゆえ、連続の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_2 h_3 u) + \frac{\partial}{\partial \beta}(h_3 h_1 v) = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

となる。ここで流れ関数を導入すれば

$$h_3 u = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \quad h_3 v = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad \dots\dots\dots(3)$$

また、 $r$  方向のか(渦)度の成分を  $\zeta$  とすると

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}(h_2 v) - \frac{\partial}{\partial \beta}(h_1 u) \right\} \\ &= -\frac{1}{h_3} D^2 \psi \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

ここに

$$D^2 \equiv \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$$

である。また、か(渦)度方程式の  $r$  成分より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi, D^2 \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ = \nu D^4 \psi \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\nu$  は動粘度である。

いま上式を無次元量で表わしてみよう。流れ関数  $\psi$  は、流量  $Q$  に比例するから、代表的な速度を  $\bar{u}$ 、長さ  $L$  とすると

$$\psi = \bar{u} L^2 \psi'$$

と表わされる。また

$$h_1 = L h_1', \quad h_2 = L h_2', \quad h_3 = L h_3', \quad D^2 = L^{-2} D'^2$$

となる。ここに  $'$  は無次元量であることを示す。

これらの値を式(5)に代入し、両辺を  $(\bar{u} L^2 / \nu)$  で割れば左辺は  $(\bar{u} L / \nu)$  の項が残る。これはレイノルズ数であるから、これを  $Re$  と表わすと、上式は次式のようになる。ただし、 $'$  はとって示してある。

$$\begin{aligned} Re \left[ -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi, D^2 \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \right] \\ = D^4 \psi \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

いま粘性が大きくて、レイノルズ数があまり大きくない場合、すなわち上式の左辺が右辺の項に比べて、そう大きな量でないとき、流れ関数  $\psi$  がレイノルズ数  $Re$  の昇べき級数で与えられると仮定してみよう。すなわち

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 Re + \psi_2 Re^2 + \dots\dots\dots(7)$$

とする。上式(7)を(6)に代入して整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} Re \left[ -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \right] \\ + Re^2 \left[ -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_1)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(\psi_1, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_1, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_1}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \Big] \\ &+ Re^3 \left[ -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_2)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(\psi_1, D^2 \psi_1)}{\partial(\alpha, \beta)} \right. \right. \\ &+ \frac{\partial(\psi_2, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} \Big\} + \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_2, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ &+ \frac{2D^2 \psi_1}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_1, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_2}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \Big] + \dots\dots \\ &= D^4 \psi_0 + Re D^4 \psi_1 + Re^2 D^4 \psi_2 + Re^3 D^4 \psi_3 + \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここで、上式の左右のレイノルズ数  $Re$  の次数の等しい項をとると

$$\begin{aligned} D^4 \psi_0 &= 0 \\ D^4 \psi_1 &= -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \\ D^4 \psi_2 &= -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_1)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(\psi_1, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\} \\ &+ \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_1, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_1}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

を得る。式(9)の第1式は慣性項が省略できるきわめておそい粘性流れの場合であり、その解はすでに求められた。

それを用いて、第2式以下の式を順次解くことが可能である。

### 3 境界条件

図1に丸みをもった管入口部を示す。管軸を  $z$  軸に、丸みの終わった位置で管軸に垂直に  $r$  軸を定める。管壁の丸みの部分を  $ABC$ 、丸みの終わったところから直管部分の壁面を  $CD$ 、丸みの曲率半径を  $b$ 、直管の半径を  $a$  とする。

この丸みのある境界を満足させる直交曲線座標とし

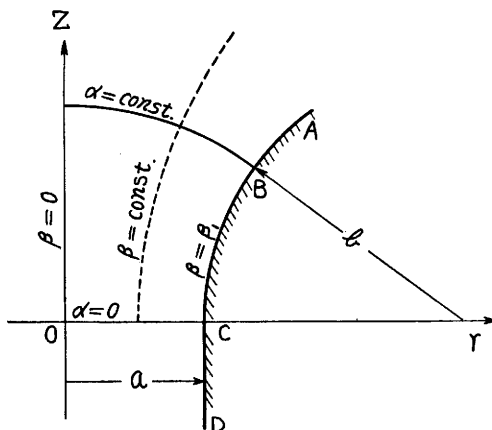


図1 管出口部と座標

て、環面座標を用いよう。直角座標  $(x, y, z)$  と環面座標  $(\alpha, \beta, r)$  との間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{k \sinh \beta \cos \alpha}{\cos \alpha + \cosh \beta} \\ y &= \frac{k \sinh \beta \sin \alpha}{\cos \alpha + \cosh \beta} \\ z &= \frac{k \sin \alpha}{\cos \alpha + \cosh \beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

上式より、 $\alpha$  および  $\beta$  をそれぞれ消去し、

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{とおけば、}$$

$$\left. \begin{aligned} (r - k \coth \beta)^2 + z^2 &= (k \operatorname{cosech} \beta)^2 \\ r^2 + (z + k \cot \alpha)^2 &= (k \operatorname{cosec} \alpha)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

となり、 $\beta = \text{const.}$  は中心が  $(k \coth \beta, 0)$  にある半径  $k \operatorname{cosech} \beta$  の円を、 $\alpha = \text{const.}$  は中心が  $(0, -k \cot \alpha)$  にある半径  $k \operatorname{cosec} \alpha$  の円を表わす。図 1 の点線が前者を、実線が後者を示す。いま、 $k$  および  $\beta_1$  を次のように選んでおく。

$$k \coth \beta_1 = a + b, \quad k \operatorname{cosech} \beta_1 = b$$

このとき円弧壁面 ABC は  $\beta = \beta_1$ 、管軸  $z$  は  $\beta = 0$ 、直管入口部 OC は  $\alpha = 0$  と表わすことができる。 $a$  および  $b$  が与えられれば上式より

$$k = a\sqrt{1+2e}, \quad \cosh \beta_1 = 1 + 1/e \quad \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここに  $e = b/a$  である。

流れに対する境界条件は壁面部で、速度成分  $u$  および  $v$  が 0 である。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \beta = \beta_1 : u = v = 0 \\ \beta = 0 : u = \text{有限}, v = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

なお、流れ関数  $\psi$  に含まれる定数は次式によって定める。

$$\beta = \beta_1 : \psi = 0$$

以上の境界条件を満足するように、式(9)を解けばよい。

#### 4 流れ関数

式(1)と(10)とより

$$h_1 = h_2 = k/(t+s), \quad h_3 = k \sinh \beta/(t+s) \quad \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここに

$$t = \cos \alpha, \quad s = \cosh \beta \quad \dots\dots\dots(15)$$

である。

式(9)の第 1 式の解は前報告<sup>(8)</sup>において厳密な解が求められている。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(s)}{(t+s)^n}, \\ f_n(s) &= B_n C_0 (s - s_1)^2 \\ &\quad (s - 1)^n (s + n + 2s_1) \\ B_n &= \frac{(2n-5)}{n+1} \left( B_{n-1} - \frac{(2n-7)}{4n} B_{n-2} \right) \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -3/2$$

$$C_0 = -\frac{Q}{2\pi(s_1 - 1)^2(1 + 2s_1)} \quad \dots\dots\dots(16)$$

である。次に式(9)の第 2 式を無次元化する前の形にもどすと

$$\nu D^4 \psi_1 = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここで、式(14)と(15)を用いて、上式右边を書き変えてみる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = \sinh \beta \frac{\partial}{\partial s}$$

であるから、ヤコビヤンの行列式を展開し、整理すると

$$\begin{aligned} D^4 \psi_1 &= \frac{(t+s)^4 \sin \alpha}{\nu k^3} \left\{ \frac{1}{(t+s)} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \left\{ \frac{\partial D^2 \psi_0}{\partial s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left( \frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{(t+s)} \right) D^2 \psi_0 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(t+s)} \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \left\{ \frac{\partial D^2 \psi_0}{\partial t} + \frac{2D^2 \psi_0}{(t+s)} \right\} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(18)$$

上式に式(16)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} (t+s)^{-4} D^4 \psi_1 &= \frac{\sin \alpha}{\nu k^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \\ &\quad \frac{A(m)C(n) - B(m)D(n)}{(t+s)^{m+n}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= f'_m - (m-1)f_m, \quad B(m) = m f_m \\ C(n) &= (n-4) \{ (s^2-1)f'_n - n(n-1)f_n \\ &\quad - (2n-3)(s^2-1)f'_{n-1} \\ &\quad + (n-1)(2n-3)s f_{n-1} \} \\ D(n) &= \{ (s^2-1)f'''_n - n(n-1)f'_n \\ &\quad + \frac{2n(n-1)s}{(s^2-1)} f_n \} \\ &\quad - \{ (3n-8)(s^2-1)f''_{n-1} \\ &\quad - (n-1)(2n-3)s f'_{n-1} \\ &\quad - \left[ (n-1)(n^2-9n+13) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(n-1)(2n-3)}{(s^2-1)} \right] f_{n-1} \} \\ &\quad + \{ (n-5)(2n-5)f'_{n-2} \\ &\quad - (n-5)(n-2)(2n-5)s f_{n-2} \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

である。また、 $'$  は  $s$  についての微分をあらわす。

式(19)の右边は奇関数であるから、 $\psi_1$  を次のように仮定しよう。すなわち

$$\psi_1 = \sin \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(s)}{(t+s)^n} \quad \dots\dots\dots(21)$$

これを式19の左辺に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} (t+s)^{-4} D^4 \psi_1 = & \frac{\sin \alpha}{k^4} \sum_{n=0}^{\infty} (t+s)^{-n} [ \{ (s^2-1)^2 g_n'''' \\ & + 4s(s^2-1)g_n''' \\ & - 2(n-2)(n-3)(s^2-1)g_n'' \\ & + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)g_n' \\ & - 2(2n-5)\{(s^2-1)^2 g_{n-1}''' \\ & - (n-6)s(s^2-1)g_{n-1}'' \\ & - (n-2)(n-3)(s^2-1)g_{n-1}' \\ & + (n-2)(n-3)(n-4)sg_{n-1}\} \\ & + (2n-5)(2n-7)\{(s^2-1)^2 g_{n-2}'' \\ & - (2n-9)s(s^2-1)g_{n-2}' \\ & + (n-3)[1+(n-5)s^2]g_{n-2}\} ] \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

上式(22)を式19の右辺に等しいとおくと

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t+s)^n} [ \{ (s^2-1)^2 g_n'''' + 4s(s^2-1)g_n''' \\ & - 2(n-2)(n-3)(s^2-1)g_n'' \\ & + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)g_n' \\ & - 2(2n-5)\{(s^2-1)^2 g_{n-1}''' \\ & - (n-6)s(s^2-1)g_{n-1}'' \\ & - (n-2)(n-3)(s^2-1)g_{n-1}' \\ & + (n-2)(n-3)(n-4)sg_{n-1}\} \\ & + (2n-5)(2n-7)\{(s^2-1)^2 g_{n-2}'' \\ & - (2n-9)s(s^2-1)g_{n-2}' \\ & + (n-3)[1+(n-5)s^2]g_{n-2}\} ] \\ & = \frac{1}{(k\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(m)C(n)-B(m)D(n)}{(t+s)^{m+n}} \quad \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

ここで左右の  $(t+s)^n$  の次数の等しい係数をそれぞれ等置する。

$n=0$  のときを第0次近似とする。このとき上式より

$$\begin{aligned} g_0'''' + \frac{4s}{(s^2-1)} g_0''' - \frac{12}{(s^2-1)} g_0'' \\ + \frac{24}{(s^2-1)^2} g_0' = -\frac{4}{k\nu} \frac{f_0'' f_0'}{(s^2-1)} \end{aligned}$$

式19を上式右辺に代入すると

$$\begin{aligned} g_0'''' + \frac{4s}{(s^2-1)} g_0''' - \frac{12}{(s^2-1)} g_0'' \\ + \frac{24}{(s^2-1)^2} g_0' = -\frac{72C_0^2}{k\nu} \frac{s(s^2-s_1^2)}{(s^2-1)} \quad \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

となる。この微分方程式の一般解は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_0 = & d_0(s^2-1) + d_1(s^2-1)^2 \\ & + d_2 \left\{ (s^2-1) \log \left( \frac{s+1}{s-1} \right) - 2s \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + d_3 \left\{ s^2(s^2-1) \log \left( \frac{s+1}{s-1} \right) - 2s^3 + \frac{4}{3}s \right\} \\ & - \frac{72C_0^2}{\nu k} \left\{ \frac{s^5}{144} + \left( \frac{1}{72} + \frac{s^2-1}{24} \right) s^3 \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{48} + \frac{s_1^2-1}{24} \right) s \right\} \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

ここに  $d_0, d_1, d_2$  および  $d_3$  は積分定数である。境界条件(13)により

$$\begin{aligned} d_0 = & \frac{C_0^2}{4k\nu} \left( 5s_1^3 + 6s_1 - \frac{3}{s_1} \right), \quad d_1 = \frac{3C_0^2}{4k\nu} (3s_1^2-1) \\ d_2 = & d_3 = 0 \end{aligned}$$

となる。それゆえ、式(25)は次のようにまとめられる。

$$g_0 = -\frac{C_0^2}{4k\nu} (s^2-1)(s-s_1)^2(2s-5s_1+3/s_1) \quad \dots\dots\dots(26)$$

次に、 $n=1$  のときを第1次近似とする。式(23)より

$$\begin{aligned} (s^2-1)^2 g_1'''' + 4s(s^2-1)g_1''' - 4(s^2-1)g_1'' \\ = -6\{(s^2-1)^2 g_0'''' + 5s(s^2-1)g_0''' \\ - 2(s^2-1)g_0'' - 6sg_0'\} \\ - \frac{(s^2-1)}{k\nu} (3f_0'f_1' + 4f_0''f_1' + f_0'''f_1 + 3f_0'f_2') \end{aligned}$$

上式に式19と(26)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} (s^2-1)g_1'''' + 4sg_1''' - 4g_1'' \\ = (9C_0^2/k\nu) [ (6s_1^4 + 4s_1^3 - 6s_1^2 + 6) \\ + (10s_1^3 + 20s_1^2 + 55s_1 - 15/s_1)s \\ - (24s_1 + 66)s^2 - 35(3s_1 - 1/s_1)s^3 + 80s^4 ] \quad \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

上式の特解は次のように定めることができる。

$$g_1 = y_1 + y_2$$

とおき、 $y_1$  および  $y_2$  がそれぞれ次式を満足するようにえらぶ。

$$\begin{aligned} (s^2-1)y_1'''' + 4s_1y_1''' - 4y_1'' \\ = (9C_0^2/k\nu) [ (10s_1^3 + 20s_1^2 + 55s_1 - 15/s_1)s \\ - 35(3s_1 - 1/s_1)s^3 ] \quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s^2-1)y_2'''' + 4s_1y_2''' - 4y_2'' \\ = (9C_0^2/k\nu) [ (6s_1^4 + 4s_1^3 - 6s_1^2 + 6) \\ - (24s_1 + 66)s^2 + 80s^4 ] \quad \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

式(28)を解くために

$$s = 1 + \eta$$

とおく。 $s = \cosh \theta$  であるから  $\eta > 0$  である。このとき式(28)は

$$\begin{aligned} \eta(2+\eta)y_1'''' + 4(1+\eta)y_1''' - 4y_1'' \\ = (9C_0^2/k\nu) [ (10s_1^3 + 20s_1^2 - 50s_1 + 20/s_1) \\ + (10s_1^3 + 20s_1^2 - 260s_1 + 90/s_1)\eta \\ - 105(3s_1 - 1/s_1)\eta^2 - 35(3s_1 - 1/s_1)\eta^3 ] \quad \dots\dots\dots(28') \end{aligned}$$

ここに  $\eta$  は  $\eta$  についての微分をあらわす。ここで

$$y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n (9C_0^2/k\nu) \quad \dots\dots\dots(30)$$

において、式(28')に代入し整理すれば係数  $a_n$  は次のように定められる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = (5/2)(s_1^3 + 2s_1^2 - 5s_1 + 2/s_1) \\ a_2 &= (5/6)(s_1^3 + 2s_1^2 - 26s_1 + 9/s_1), \\ a_3 &= -(5/24)(s_1^3 + 2s_1^2 + 37s_1 - 12/s_1) \\ a_4 &= (7/96)s_1(1 + s_1)^2 \\ a_{n+1} &= -\frac{(n+4)(n-1)}{2(n+1)(n+2)} a_n \quad (n \geq 4) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(31)$$

次に式(29)の特解は

$$y''_2 = (9C_0^2/k\nu)(b_0 + b_2 s^2 + b_4 s^4) \quad \dots\dots\dots(32)$$

において、代入すれば係数  $b_n$  は次のように定められる。

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= (1/6)(4 + 12s_1 + 9s_1^2 - 6s_1^3 - 9s_1^4) \\ b_2 &= -(1/3)(13 + 12s_1), \quad b_4 = 10/3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(33)$$

よって、式(27)の一般解は次のようになる。

$$\begin{aligned} g_1'' &= \left( \frac{9C_0^2}{k\nu} \right) \left[ e_0 \left\{ 3s \log \left( \frac{s+1}{s-1} \right) - \frac{2}{(s^2-1)} - 6 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 6e_1 s + b_0 + b_2 s^2 + b_4 s^4 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta^n \right] \quad \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

境界の条件より  $e_0 = 0$  である。上式を  $s$  について 2 回積分すると

$$\begin{aligned} g_1 &= \left( \frac{9C_0^2}{k\nu} \right) \left[ e_1 s^3 + e_2 s + e_3 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{b_0}{2} s^2 + \frac{b_2}{12} s^4 + \frac{b_4}{30} s^6 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (s-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right] \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

ここに  $e_1, e_2$  および  $e_3$  は積分定数である。式(3)により速度成分を求めると

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{\sin \alpha}{k^2} [(t+s)g_1' - g_1], \\ v_{11} &= -\frac{g_1}{k^2 \sqrt{s^2-1}} [s(t+s) - (s^2-1)] \end{aligned}$$

となる。境界の条件により

$$s=s_1 : g_1 = g_1' = 0, \quad s=1 : g_1 = 0$$

よって積分定数  $e_1, e_2$  および  $e_3$  は次式を満足せねばならない。

$$\left. \begin{aligned} 3e_1 s_1^2 + e_2 + (b_0 s_1 + b_2 s_1^3/3 + b_4 s_1^5/5) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (s_1-1)^{n+1}/(n+1) &= 0 \\ e_1 s_1^3 + e_2 s_1 + e_3 + (b_0 s_1^2/2 + b_2 s_1^4/12 + b_4 s_1^6/30) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (s_1-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} &= 0 \\ e_1 + e_2 + e_3 + (b_0/2 + b_2/12 + b_4/30) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(36)$$

式(36)によって、係数  $e$  を定めることができる。

以下同様にして、 $n \geq 2$  の場合の  $g_n$  の解を求めることができるが、計算はきわめて複雑なものになる。しかし、丸みの大きいときは第 0 次と第 1 次近似解が分ればよく、高次の近似値はその値がきわめて小さくて無視できるから、あまりその必要はないであろう。

次に式(9)の第 3 式を無次元化する前の式にもどし、流れ関数  $\psi_2$  について考察してみよう。

$$\begin{aligned} \nu D^4 \psi_2 &= -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(\psi_0, D^2 \psi_1)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(\psi_1, D^2 \psi_0)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\} \\ &\quad + \frac{2D^2 \psi_0}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_1, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2D^2 \psi_1}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(\psi_0, h_3)}{\partial(\alpha, \beta)} \quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

上式に式(16)と(21)とを代入して整理すれば

$$\begin{aligned} D^4 \psi_2 &= \frac{(t+s)^6}{k\nu} \left[ -(s^2-1) \left\{ f_0''' g_0 - 4f_0'' g_0' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 5f_0' g_0'' + \frac{10f_0' g_0'}{(s^2-1)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(t+s)} \left\{ -(s^2-1)f_1''' g_0 + 3(s^2-1)f_1'' g_0' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 5f_1'[(s^2-1)g_0'' - 2g_0] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_1[(s^2-1)g_0''' - 2g_0' + \frac{4sg_0}{(s^2-1)}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + s(s^2-1)f_0''' g_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (s^2-1)f_0''(4g_1' - 8sg_0' - 5g_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_0'[4(s^2-1)g_1'' - 9s(s^2-1)g_0'' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 7(s^2-1)g_0' + 22sg_0] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(t+s)^2} \left\{ \dots\dots\dots \right\} + \dots\dots \right] \quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

上式を解くために

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(s)}{(t+s)^{n-2}} \quad \dots\dots\dots(39)$$

と置く。前と同様にして、左右の  $(t+s)$  のべき指数の等しいものを等置する。

$n=0$  のときを第 0 次近似とすると

$$\begin{aligned} (s^2-1)h_0'''' + 4sh_0''' - 24h_0'' + \frac{120h_0}{(s^2-1)} \\ = -\frac{1}{k\nu} \{ f_0''' g_0 - 4f_0'' g_0' - 5f_0' g_0'' \\ + 10f_0' g_0/(s^2-1) \} \quad \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

上式右边に式(16)と(20)とを代入し整理すると

$$\begin{aligned} (s^2-1)h_0'''' + 4sh_0''' - 24h_0'' \\ + 120h_0/(s^2-1) = (3C_0^3/2k^2\nu^2)(s-s_1) \\ \times \{ -128s^4 + (232s_1 - 120/s_1)s^3 \\ + (70s_1^2 + 58)s^2 - (95s_1^3 + 25s_1^2 - 4s_1 \\ - 36/s_1)s + (25s_1^4 - 25s_1^3 - 50s_1^2 + 18) \} \quad \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

上式の解は前と同様にして次のようになる。

$$\begin{aligned}
h_0 = & (3C_0^3/2k^2\nu^2)[e_0s(s^2-1)+e_1s^3(s-1) \\
& +e_2\{s(s^2-1)\log(s+1)/(s-1)-2s^2+4/3\} \\
& +e_3\{s^3(s^2-1)\log(s+1)/(s-1)+1.5s^4-11s^2/3+53/30\} \\
& +(s^2-1)\{b_0+b_2s^2+b_4s^4+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(s-1)^n\}] \quad \dots\dots\dots(42)
\end{aligned}$$

ここに  $e_0, e_1, e_2$  および  $e_3$  は積分定数であり、前と同様に  $e_2=e_3=0$  となる。また、 $a_n$  および  $b_n$  は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
a_2 &= (15s_1^4-27s_1^2+4)/6, & a_3 &= (90s_1^4-243s_1^2-15)/72 \\
a_4 &= -(5s_1^4+18s_1^2+57)/80, & a_5 &= (30s_1^4+27s_1^2-209)/1200 \\
a_6 &= -(180s_1^4+27s_1^2-39)/16800, & a_7 &= (450s_1^4-81s_1^2-41)/94080 \\
a_{n+2} &= -\frac{(n^2+4n+9)a_{n+1}}{(n+3)(n+2)} - \frac{(n+6)(n+4)(n-1)(n-3)a_n}{4(n+1)(n+2)^2(n+3)} \\
& \text{ただし } n \geq 6 \\
b_0 &= (-25s_1^5+25s_1^4-32.5s_1^3-12.5s_1^2+63s_1-18/s_1)/72 \\
b_2 &= (165s_1^3+25s_1^2-234s_1+60/s_1)/48 \\
b_4 &= 1.5s_1-1/2s_1
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots(43)$$

また  $e_0$  および  $e_1$  は境界条件より次のごとく定まる。

$$\begin{aligned}
e_0 &= -\frac{3b_0}{2s_1} - \frac{b_2s_1}{2} + \frac{b_4s_1^3}{2} + \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left\{-\frac{1}{3}n(s_1-1)^{n-1}-\frac{(s_1-1)^n}{s_1}\right\} \\
e_1 &= -\frac{b_0}{2s_1^3} - \frac{b_2}{2s_1} - \frac{3b_4s_1}{2} - \frac{1}{2s_1^2}\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left\{n(s_1-1)^{n-1}-\frac{(s_1-1)^n}{s_1}\right\}
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots(44)$$

以上によって  $\psi_2$  の第0次近似解が求められた。以下同様な方法で高次の解が求められるが計算はきわめて複雑なものとなるであろう。

## 5 速度分布および数値計算例

前章で流れ関数の近似解の一部が求められた。管入口または出口の丸みの曲率半径が大きいときは始めの数項がわかれば十分である。

式(3)に式(14)を用いて式(16), (21)および(22)を代入すれば  $\alpha$  および  $\beta$  方向の速度成分  $u$  および  $v$  は

$$\begin{aligned}
u = & \frac{(t+s)^2}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{f_n'}{(t+s)^n}-\frac{nf_n}{(t+s)^{n+1}}\right\}+\sin\alpha\left\{\frac{g_n'}{(t+s)^n}-\frac{ng_n}{(t+s)^{n+1}}\right\} \\
& +\left\{\frac{h_n'}{(t+s)^{n-2}}-\frac{(n-2)h_n}{(t+s)^{n-1}}+\dots\dots\dots\right\} \quad \dots\dots\dots(45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{(t+s)^2}{k^2\sqrt{s^2-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{nf_n}{(t+s)^{n+1}}\sin\alpha+\left\{\frac{(n-1)}{(t+s)^{n-1}}-\frac{(2n-1)s}{(t+s)^n}+\frac{n(s^2-1)}{(t+s)^{n+1}}\right\}g_n\right. \\
& \left.+\frac{(n-2)h_n}{(t+s)^{n-1}}\sin\alpha+\dots\dots\dots\right] \quad \dots\dots\dots(46)
\end{aligned}$$

と与えられる。

いま、丸みの曲率半径  $b$  が直管内半径  $a$  の10倍 ( $\epsilon=10$ ) のときの数値計算を示そう。直管内の平均流速を  $\bar{u}$ ,

$$Re=2a\bar{u}/\nu \quad \text{と表す。式(12)より}$$

$$k=\sqrt{21}a, \quad s_1=\cosh\beta_1=1.1$$

また、式(16)より

$$C_0/k^2=-0.744\bar{u}, \quad C_0/k\nu=-1.705Re$$

となる。近似解の収束状態を調べるために速度成分を分割して表に示そう。

流れ関数  $\psi_0$  による  $\alpha$  および  $\beta$  方向の速度成分を  $u_{0n}$  および  $v_{0n}$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) とする。これは式(45)および(46)の右辺第一項にあたる。 $t=1, 0.707$  および  $0$  (これは  $\alpha=0, \pi/4$  および  $\pi/2$  のときにあたる) における数値計算結果を表1に示す。その結果、 $u_{0n}$  は第1次までとれば十分であり、また、 $v_{0n}$  は  $u_{0n}$  にくらべてきわめて小さいことがわかる。

表1 (イ)  $u_0/\bar{u}$  の 計 算 値

$t = 1$ のとき				
$s$	$u_{00}/\bar{u}$	$u_{01}/\bar{u}$	$u_{02}/\bar{u}$	$u_0/\bar{u} = \sum u_{0n}/\bar{u}$
1	1.875	0.094	0	1.969
1.0038	1.814	0.079	0.0001	1.893
1.0154	1.623	0.045	0.0000	1.668
1.0349	1.285	-0.003	-0.0002	1.282
1.0629	0.763	-0.066	-0.0002	0.697
1.1	0	0	0	0

$t = 0.707$ のとき				
$s$	$u_{00}/\bar{u}$	$u_{01}/\bar{u}$	$u_{02}/\bar{u}$	$u_0/\bar{u} = \sum u_{0n}/\bar{u}$
1	1.336	0.080	0	1.446
1.0038	1.322	0.072	0.0001	1.394
1.0154	1.185	0.039	0.0001	1.224
1.0349	0.941	-0.002	-0.0002	0.939
1.0629	0.561	-0.027	-0.0002	0.534
1.1	0	0	0	0

$t = 0$ のとき				
$s$	$u_{00}/\bar{u}$	$u_{01}/\bar{u}$	$u_{02}/\bar{u}$	$u_0/\bar{u} = \sum u_{0n}/\bar{u}$
1	0.469	0.047	0	0.516
1.0038	0.454	0.040	0.0000	0.494
1.0154	0.412	0.021	-0.0000	0.433
1.0349	0.332	-0.002	-0.0002	0.330
1.0629	0.202	-0.017	+0.0002	0.185
1.1	0	0	0	0

表1 (ロ)  $v_0/\bar{u}$  の 計 算 値

$t = 0.707$ のとき				
$s$	$v_{00}/\bar{u}$	$v_{01}/\bar{u}$	$v_{02}/\bar{u}$	$v_0/\bar{u} = \sum v_{0n}/\bar{u}$
1	0	0	0	0
1.0038	0	-0.0013	0.0000	-0.0013
1.0154	0	-0.0021	0.0000	-0.0021
1.0349	0	-0.0019	0.0001	-0.0018
1.0629	0	-0.0008	0.0001	-0.0007
1.1	0	0	0	0

$t = 0$ のとき				
$s$	$v_{00}/\bar{u}$	$v_{01}/\bar{u}$	$v_{02}/\bar{u}$	$v_0/\bar{u} = \sum v_{0n}/\bar{u}$
1	0	0	0	0
1.0038	0	-0.0019	0.0000	-0.0019
1.0154	0	-0.0029	0.0001	-0.0028
1.0349	0	-0.0027	0.0001	-0.0026
1.0629	0	-0.0011	0.0001	-0.0010
1.1	0	0	0	0

 $t = 1$  のときは  $v_0/\bar{u} = 0$

次に  $\psi_1$  による速度成分  $u_{1n}$  および  $v_{1n}$  を求めよう。第0次近似解は式(30)を用いれば、ただちに求まる。第1次近似解は次のようになる。すなわち式(31), (33)および(36)より

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.17295455, & a_2 &= -13.88931820, & a_3 &= -6.98789770 \\ a_4 &= 0.35371880, & a_5 &= -0.1414875, & a_6 &= 0.0606375 \\ a_7 &= -0.0270703, & b_0 &= 1.1545167, & b_2 &= -8.7333333 \\ b_4 &= 3.3333333, & e_1 &= 0.70624531, & e_2 &= -1.02868228 \\ & & e_3 &= 0.36184529 \end{aligned}$$

を得るから、式(35)より

$$g_1 = (9C_0^2/k\nu)[0.0001259\eta - 0.0040017\eta^2 + 0.046182\eta^3 - 0.128554\eta^4 + 0.317272\eta^5 + 0.123\eta^6 + \dots]$$

これらを用いて速度成分  $u_{1n}$  および  $v_{1n}$  を求めた結果を表2に示す。ただし、 $\psi_1$  は  $\sin\alpha$  を含むので、 $t=1$  ( $\alpha=0$ ) では速度成分  $u_{1n}$  はすべて0となるので表には示していない。

次に  $\psi_2$  による速度成分  $u_{20}$  を求める。式(43)および(44)より

$$\begin{aligned} a_2 &= -1.118083 & a_3 &= -2.461958 & a_4 &= -1.076256 \\ a_5 &= -0.110339 & a_6 &= -0.015310 & a_7 &= 0.005525 \\ b_0 &= -0.12647759 & b_2 &= 0.97938447 & b_4 &= 1.19545454 \\ e_0 &= 0.29721686 & e_1 &= -2.34562707 \end{aligned}$$

を得る。それゆえ式(42)より

表2  $u_1/\bar{u}$  と  $v_1/\bar{u}$  の計算値

$t=0.707$ のとき			
$s$	$u_{10}/\bar{u}$	$u_{11}/\bar{u}$	$u_1/\bar{u} = \sum u_{1n}/\bar{u}$
1	0.01009 $R_e$	0.00173 $R_e$	0.01172 $R_e$
1.0038	0.00842 $R_e$	0.00134 $R_e$	0.00976 $R_e$
1.0154	0.00488 $R_e$	0.00044 $R_e$	0.00532 $R_e$
1.0349	-0.00064 $R_e$	-0.00028 $R_e$	-0.00092 $R_e$
1.0629	-0.00330 $R_e$	-0.00031 $R_e$	-0.00361 $R_e$
1.1	0	0	0
$t=0$ のとき			
$s$	$u_{10}/\bar{u}$	$u_{11}/\bar{u}$	$u_1/\bar{u} = \sum u_{1n}/\bar{u}$
1	0.00490 $R_e$	0.00144 $R_e$	0.00634 $R_e$
1.0038	0.00410 $R_e$	0.00113 $R_e$	0.00523 $R_e$
1.0154	0.00210 $R_e$	0.00022 $R_e$	0.00232 $R_e$
1.0349	-0.00032 $R_e$	-0.00024 $R_e$	-0.00056 $R_e$
1.0629	-0.00168 $R_e$	-0.00026 $R_e$	-0.00194 $R_e$
1.1	0	0	0
$t=1$ のとき			
$s$	$v_{10}/\bar{u}$	$v_{11}/\bar{u}$	$v_1/\bar{u} = \sum v_{1n}/\bar{u}$
1	0	0	0
1.0038	-0.00078 $R_e$	-0.00057 $R_e$	-0.00020 $R_e$
1.0154	-0.00121 $R_e$	-0.00088 $R_e$	-0.00031 $R_e$
1.0349	-0.00103 $R_e$	-0.00076 $R_e$	-0.00027 $R_e$
1.0629	-0.00040 $R_e$	-0.00030 $R_e$	-0.00012 $R_e$
1.1	0	0	0



$$h_0 = (3C_0^3/k^2\nu^2)[ -0.00009758\eta + 0.00179671\eta^2 - 0.00478225\eta^3 - 0.054386\eta^4 + 0.212630\eta^5 \\ - 0.101489\eta^6 - 0.140959\eta^7 - 0.00426\eta^8 - \dots ]$$

となる。この第0次近似解による速度成分  $u_{20}$  の結果を表3に示す。 $v_{20}$  は小さいので省略した。

まず、 $t=1$  すなわち、直管出口または入口では最大流速は管軸 ( $s=1$ ) のところでおこり、ポアズイユ流れのとき、 $u_{max}/\bar{u}=2$  である。表より、 $u_0/\bar{u}=1.969$ 、 $u_2/\bar{u}=0.00506Re^2$  であるから、 $Re$  数が2を越えると、速度成分の和は2より大きくなるから、 $Re \leq 2$  でなければならない。もっと高次の項を計算しなければもちろんはっきりしたことはいえないが、上表の収束状況からみてそう大きな間違いはないと思われる。このとき慣性項を考慮した影響は、慣性項を無視した場合の1%以下の程度であるから、慣性項が省略できるおそい流れは、 $\epsilon=10$  の場合に  $Re \leq 2$  の場合に成り立つと考えられる。

しかし、 $t$  が小さくなって、たとえば、 $t=0$  では上表より、 $Re=10$ 、 $s=1$  において、 $u_0/\bar{u}=0.516$ 、 $u_1/\bar{u}=0.063$ 、 $u_2/\bar{u}=0.032$  と収束している。 $s$  の値によって収束状況が異なるから一概にはいえないが、丸みのある拡大部では流れがおそくなるから、 $Re$  数のかなり高いところまで考慮することが可能であろう。

図2に丸みをもった管出口の  $t=0$  ( $\alpha=\pi/2$ ) の位置における速度分布を示した。慣性項を省略した場合を点線で、 $Re=10$  のときを実線で、 $Re=15$  のときを一点鎖線で示した。拡大流れでは  $Re$  数の増加と共に、流れは中央に集中する傾向がはっきり見られる。

表3  $u_2/\bar{u}$  の計算値

	$t=1$	$t=0.707$	$t=0$
$s$	$u_{20}/\bar{u}$	$u_{20}/\bar{u}$	$u_{20}/\bar{u}$
1	0.00506 $Re^2$	0.00269 $Re^2$	0.00032 $Re^2$
1.0038	0.00437 $Re^2$	0.00233 $Re^2$	0.00028 $Re^2$
1.0154	0.00251 $Re^2$	0.00134 $Re^2$	0.00017 $Re^2$
1.0349	-0.00011 $Re^2$	-0.00005 $Re^2$	-0.
1.0629	-0.00194 $Re^2$	-0.00105 $Re^2$	-0.00013 $Re^2$
1.1	0	0	0

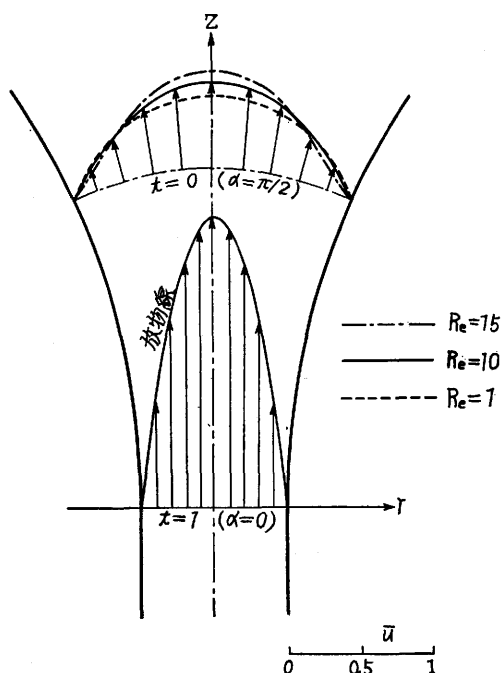


図2 丸みのある管出口の粘性流 ( $\epsilon=10$ )

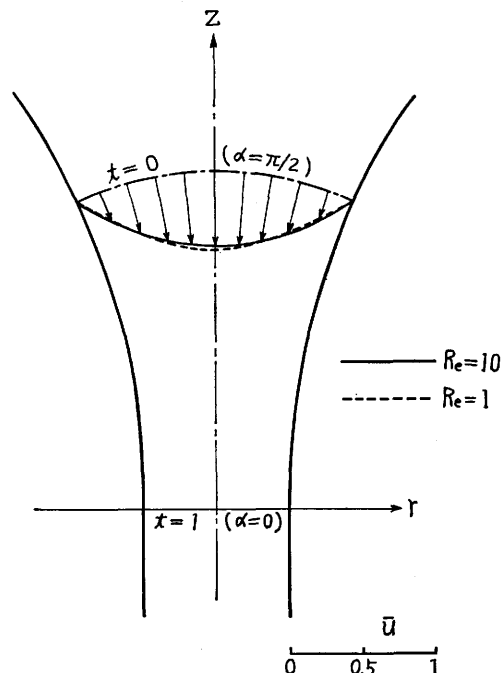


図3 丸みのある管入口の粘性流 ( $\epsilon=10$ )

図3に丸みをもった管入口の  $t=0$  における速度分布を示した。 $\alpha$  の増加する方向と  $u$  の方向は逆で  $u$  は負であるから、 $Re$  も負となり、表中の速度成分を加えるとき、これに注意せねばならない。この結果、収縮流れでは  $Re$  数の増加にしたがって、流れは断面にわたって平均化するようになり、拡大流と収縮流では流れの様子が全く異なったものとなる。

しかし、本解法によって流れの様子を調べるとしても、 $Re$  数は小さいところでしか用いることはできない。

## 6 管摩擦係数

丸みをもった壁面上の摩擦応力  $\tau_0$  は前報告でも述べたように、次式で与えられる。

$$\tau_0 = \mu \left| \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1} \quad \dots\dots\dots(47)$$

また

$$s=s_1: f_n=f'_n=g_n=g'_n=h_n=h'_n=\dots=0$$

であるから、式(45)を用いると、

$$\tau_0 = \frac{\mu(t+s_1)^3 \sinh \beta_1}{k^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{f''_n}{(t+s)^n} + \frac{g''_n \sin \alpha}{(t+s)^n} + \frac{h''_n}{(t+s)^{n-2}} + \dots\dots\dots \right] \quad \dots\dots\dots(48)$$

となる。

$\epsilon=10$  すなわち、 $s_1=1.1$  のときの計算例を示す。

$$f_0''=6.6C_0 \quad f_1''=-1.29C_0 \quad f_2''=-0.04C_0 \dots\dots\dots$$

$$g_0''=-0.1025C_0Re \quad g_1''=-0.00297C_0Re \dots\dots\dots$$

$$h_0''=-0.0167C_0Re^2 \dots\dots\dots$$

これらの値を上式に代入すれば、次式のように整理される。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0 Re}{(\rho u^2/2)} = & -0.298(t+1.1)^3 \left\{ \left[ 6.6 - \frac{1.29}{(t+1.1)} - \frac{0.04}{(t+1.1)^2} - \dots\dots\dots \right] \right. \\ & - \sqrt{1-t^2} \left\{ 0.1025 + \frac{0.00297}{(t+1.1)} + \dots\dots\dots \right\} Re \\ & - \{ 0.0167(t+1.1)^2 + \dots\dots\dots \} Re^2 \\ & \left. + \dots\dots\dots \right\} \end{aligned}$$

はく離点の位置は  $\tau_0=0$  となる位置である。しかし、上式は  $t$  の無限級数で与えられるから、その位置を求めることは不可能である。

そこで、 $t=0$  において、 $\tau_0=0$  ならしめる  $Re$  数を逆に推定してみよう。 $Re^2$  以上の項を省略してみると、 $Re=16$  を得る。前報告<sup>(1)</sup>において  $Re=1000$  ではく離する位置は  $t=0.654$ 、 $Re=100$  では  $t=0.528$  なる近似値を得た。それゆえ、 $Re$  数の減少にともなって、はく離する位置  $t$  の値は小さくなる。すなわち拡大部の外側に移行する。 $Re$  数が 100 以下になれば当然  $t$  の値は小さくなり、いま推定した  $Re=16$  付近においては、はく離する位置は  $t=0$  近傍になると思われる。しかし、正確な値はもっと高次の項を求めなければ知ることができない。しかしながら、高次の項を求めるためには計算がきわめて複雑になり、ほとんど不可能に近い。それゆえ、本解法によって、はく離点を正しく求めることは困難なことであろう。

実際に、たとえば毛細管粘度計を用いて、管出口の

流れを観察しても、 $Re=10\sim 50$  の間において、はく離がおり、この  $Re$  数の範囲の流れを知ることは理論的にもきわめて困難なことであり、また、管出口の付加損失を知ることも理論的には困難であるから、実験によって調べた方がよいと思われる。

## 7 結 論

丸みのある管出口の比較的小さい粘性流れを、ナビヤ・ストークスの運動方程式より考察した。その結果は次のように要約される。

(1) 流れ関数をレイノルズ数の昇べき級数で与えた。しかし、高次の項を求めることはきわめて困難である。

(2)  $\epsilon=10$  のとき、 $Re \leq 2$  においてはナビヤ・ストークスの運動方程式の慣性項は省略してよい。

(3) 拡大流と収縮流とは流れの様子は明らかに異なる。拡大流では流れは中央に集中しようとするが、収縮流では平均化しようとする傾向がみられる。

(4) 本解法によって、はく離点を正しく求めることはできない。ある程度の推定は可能である。

本研究について助言を賜った東京都立大学岩浪繁蔵教授に対し、深く感謝の意を表します。

#### 文 献

- 1) 葦埜：日本機械学会論文集，35-276(昭44)，1696
- 2) Pohlhausen K.：Z.AMM，1，235，(1921)
- 3) 葦埜：日本機械学会論文集，34-261(昭43)，877

(昭和44年9月30日受理)